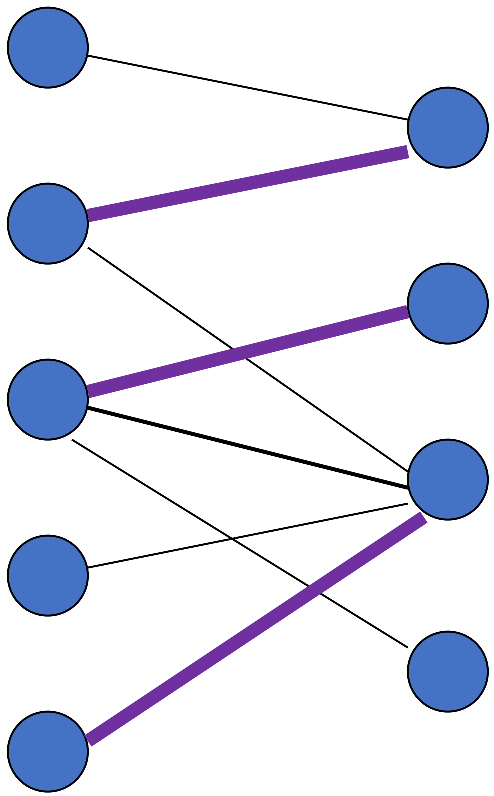
Maximum Matching



הגדרות (חזרה)

- יהי $G = (V,E)$ גרף **לא מכוון**.
- אם $M \subseteq E$ ולכל $(u,v),(x,y) \in M$ אין צומת משותף,
- אז **M** נקרא **זיווג (Matching)**.
- $|M|$ - **גודל** זיווג M – מספר צלעות ב-M.
- **זיווג מקסימום** (Maximum matching) הוא זיווג **בגודל מקסימלי**.
- נסמן: $\mu(G)$ = גודל של זיווג מקסימלי.
- **זיווג מושלם** (Perfect matching) הוא זיווג שמכסה את כל הצמתים של **G**.

הערות :

- כל זיווג מושלם הוא גם זיווג מקסימום.
- אם ב-G יש זיווג מושלם, אז $|V|$ הוא מספר זוגי.

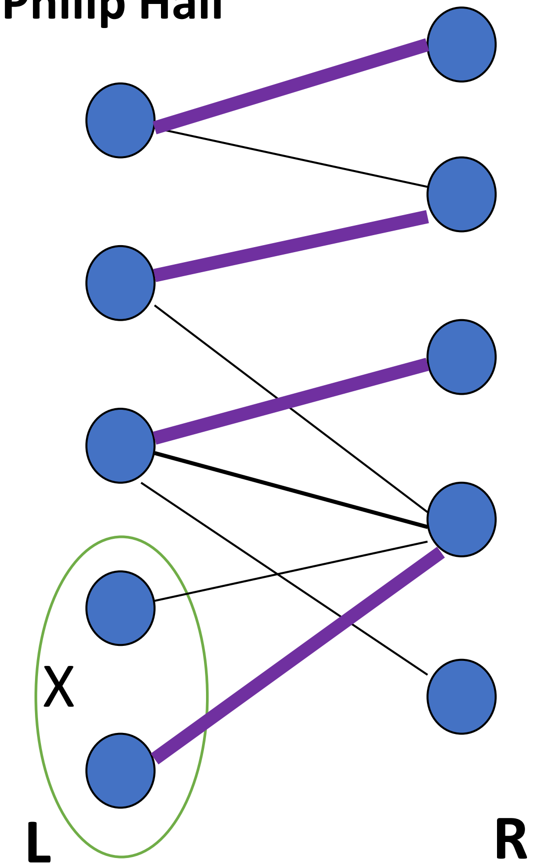
משפט HALL

Philip Hall

יהי $G=(L\cup R,E)$ – גרף לא מכוון דו-צדדי.

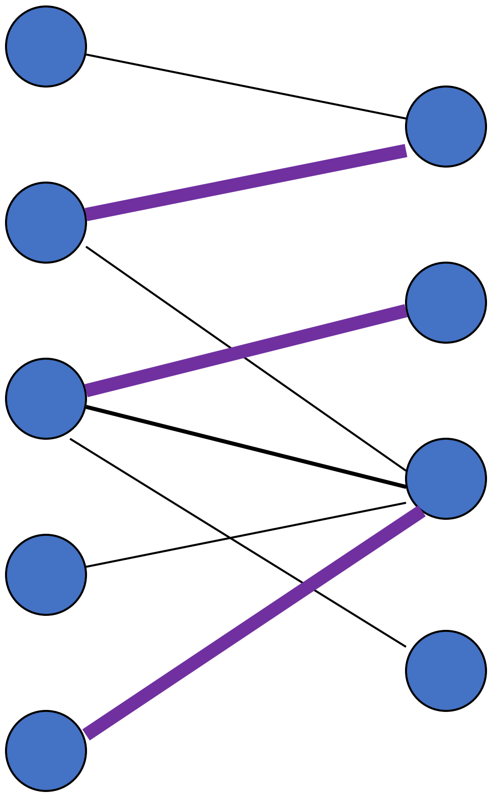
א. משפט HALL: ב-G קיים **זיווג שמכסה את L**
$\Leftrightarrow$ $|X| \le |N(X)|$ לכל $X \subseteq L$.

ב. משפט החתונה: ב-G קיים **זיווג מושלם**
אם ורק אם מתקיימים: $|R| = |L|$ וגם
$|X| \le |N(X)|$ לכל $X \subseteq L$.



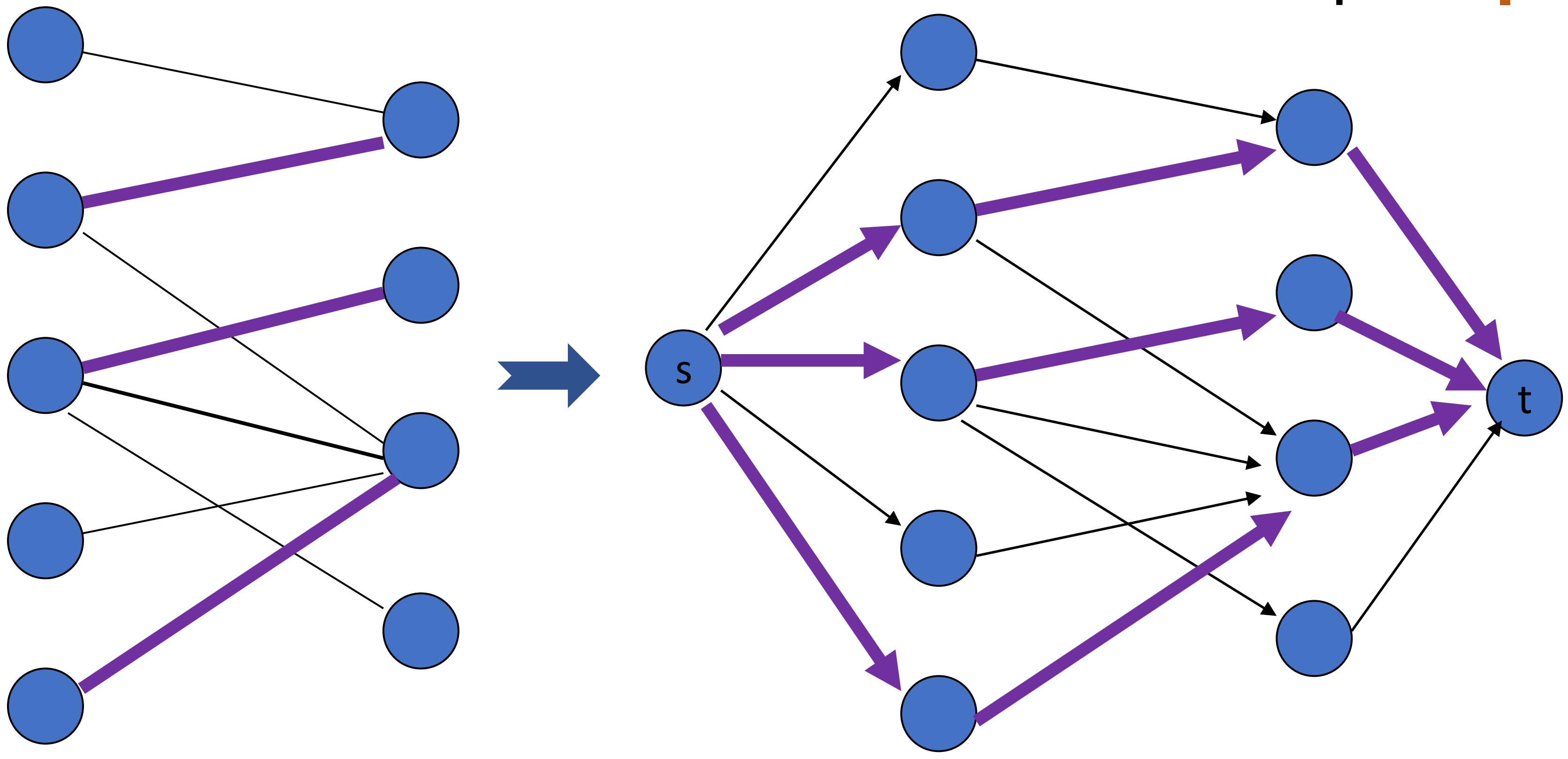
מציאת זיווג מקסימום בגרף דו-צדדי

- **קלט**: גרף $G=(V,E)$ **דו צדדי**
- **פלט**: זיווג מקסימום ב- G



מציאת זיווג מקסימום בגרף די-צדדי

- **הרעיון**: רדוקציה לבעיית הזרימה ברשת 0-1



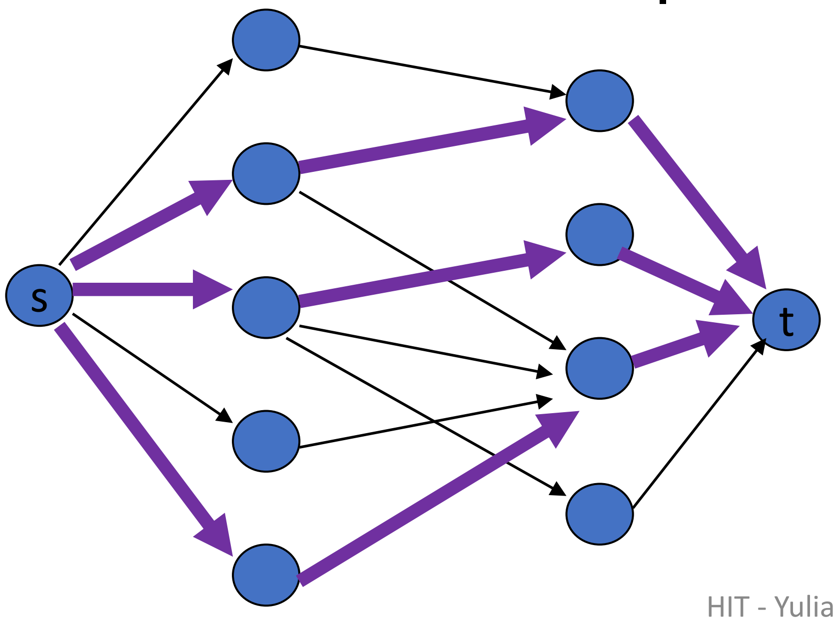
גרף דו-צדדי

רשת הזרימה המתאימה

אלגוריתם למציאת זיווג מקסימום

1. נבנה רשת זרימה **N** באופן הבא:

- נוסיף שני קדקודים חדשים **s,t**.
- נחבר את **s** בקשת לכל אחד מקדקודי **L**.
- נחבר כל אחד מקדקודי **R** בקשת ל- **t**.
- כל צלע **E** ∋ **(u,v)** כך ש- **L** ∋ **u**, **R** ∋ **v** תכוון **v** → **u**.
- **איך נגדיר קיבולי הקשתות** שהקשתות שבהן יש זרימה חיובית **יהוו זיווג?**



אלגוריתם למציאת זיווג מקסימום

1. נבנה רשת זרימה **N** באופן הבא:
   - נוסיף שני קדקודים חדשים **s,t**.
   - נחבר את **s** בקשת לכל אחד מקדקודי **L**.
   - נחבר כל אחד מקדקודי **R** בקשת ל- **t**.
   - כל צלע **$(u,v) \in E$** כך ש- **$u \in L$**, **$v \in R$** תכוון **$v \rightarrow u$**.
   - נגדיר את קיבולי הקשתות כ- **1** .

   (כאופציה – קיבולי הקשתות של G מוגדרים כ- ∞)
2. נמצא זרימה מקסימאלית **f** ברשת החדשה בעזרת אלגוריתם פורד-פלקרסון.
3. הזיווג **M** יכלול את הקשתות (u,v) המקיימות: **$f(u,v)=1$**

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה 1: יהיה **G=(L ∪ R,E)** גרף דו-צדדי ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.
לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** מתאים זיווג **M** ב- **G**, שגודלו הוא **|f|.**

הוכחה: בהינתן זרימה f, נגדיר זיווג M באופן הבא:

$$M = \{(u,v) : f(u,v) > 0, u \in L, v \in R\}$$

M -זיווג:

נראה שכל קדקוד L ∈ u מופיע בקשת אחת לכל היותר ב-M.

לכל קדקוד L ∈ u נכנסת רק קשת אחת: (s,u) וקיבולה 1 . לכן לכל קדקוד L ∈ u נכנסת לכל היותר יחידה אחת של זרימה . בזרימה עם ערכים שלמים תיתכן לכל היותר קשת אחת עם זרימה חיובית שיוצאת מ- u. על כן כל L ∈ u מופיע לכל היותר בקשת אחת של M.

בדומה ניתן להראות שכל קדקוד R ∈ v מופיע לכל היותר בקשת אחת של M.
לכן M הוא זיווג.

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה 1: יהיה $G=(L \cup R,E)$ גרף דו-צדדי ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.
לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** מתאים זיווג **M** ב- **G**, שגודלו הוא **|f|**.

הוכחה: בהינתן זרימה f, נגדיר זיווג M באופן הבא:

$$M = \{(u,v): f(u,v) > 0, u \in L, v \in R\}$$

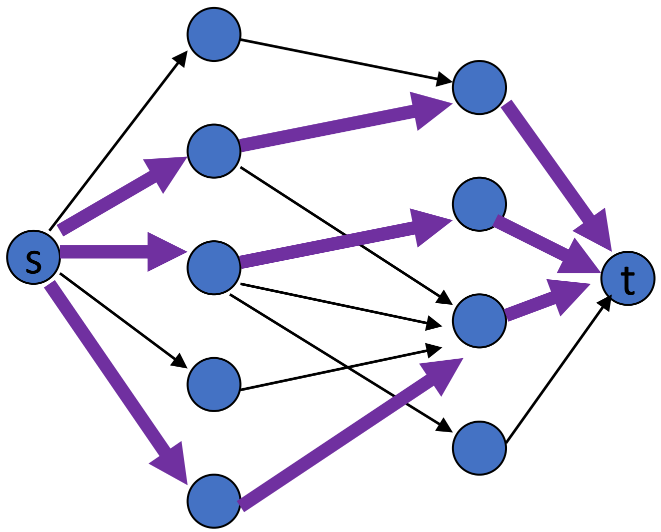
M –זיווג. ✓

נוכיח : |M|=|f|

נסתכל על החתך: $(\{s\} \cup L, R \cup \{t\})$.

הזרימה בחתך שווה מצד אחד לזרימה |f| (למת חתך),

ומצד שני - זהו מספר הצלעות שמשתתפות בזיווג M.



הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה 2: יהיה $G=(L \cup R,E)$ גרף דו-צדדי ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.
לכל זיווג **M** ב- **G** יש זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N**, שגודלה היא **|M|**.

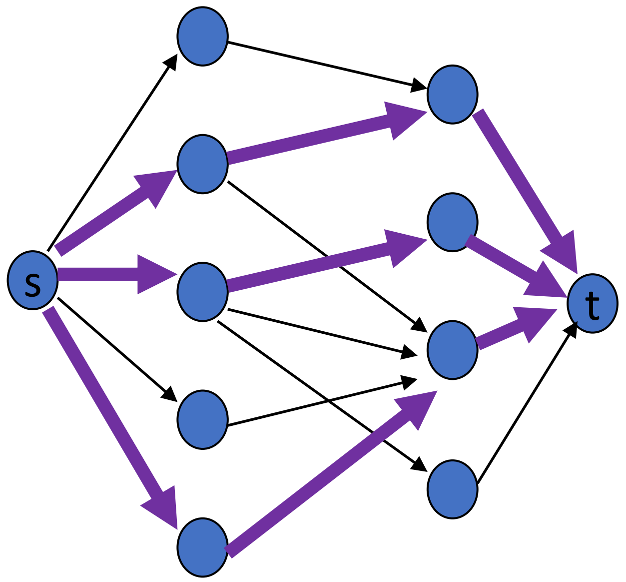
הוכחה: בהינתן זיווג M, נגדיר זרימה f באופן הבא:

אם **M ∋ (u ,v)** נגדיר $f(s,u) = f(u,v) = f(v,t) = 1$
$f(u,s) = f(v,u) = f(t,v) = -1$

לכל יתר הזוגות נגדיר $f(u,v) = 0$

נוכיח ש-f – זרימה.

1. **אילוצי הקיבול.** ✓
2. **אנטי-סימטריה.** ✓



הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה 2: יהיה **G=(L ∪ R,E)** גרף דו-צדדי ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.
לכל זיווג **M** ב- **G** יש זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N**, שגודלה היא **|M|**.

הוכחה: בהינתן זיווג M, נגדיר זרימה f באופן הבא:

אם M ∋ (v, u) נגדיר $f(s,u) = f(u,v) = f(v,t) = 1$
$f(u,s) = f(v,u) = f(t,v) = -1$

לכל יתר הזוגות נגדיר $f(u,v) = 0$

נוכיח ש-f – זרימה.

3. שימור הזרימה:

יהי L ∋ u שמתקיים M ∋ (v, u) ולכן f(s,u)=1. אז קיימת בדיוק צלע אחת (u,v) עבורה f(u,v)=1, כי M – זיווג.

באופן דומה ניתן להוכיח שימור זרימה עבור R ∋ v.

אז |f|=|M|

הוכחת נכונות האלגוריתם

טענה 1: יהיה $G=(L \cup R,E)$ גרף דו-צדדי ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.
לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** מתאים זיווג **M** ב- **G**, שגודלו הוא **|f|**.

טענה 2: יהיה $G=(L \cup R,E)$ גרף דו-צדדי ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.
לכל זיווג **M** ב- **G** יש זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N**, שגודלה היא **|M|**.

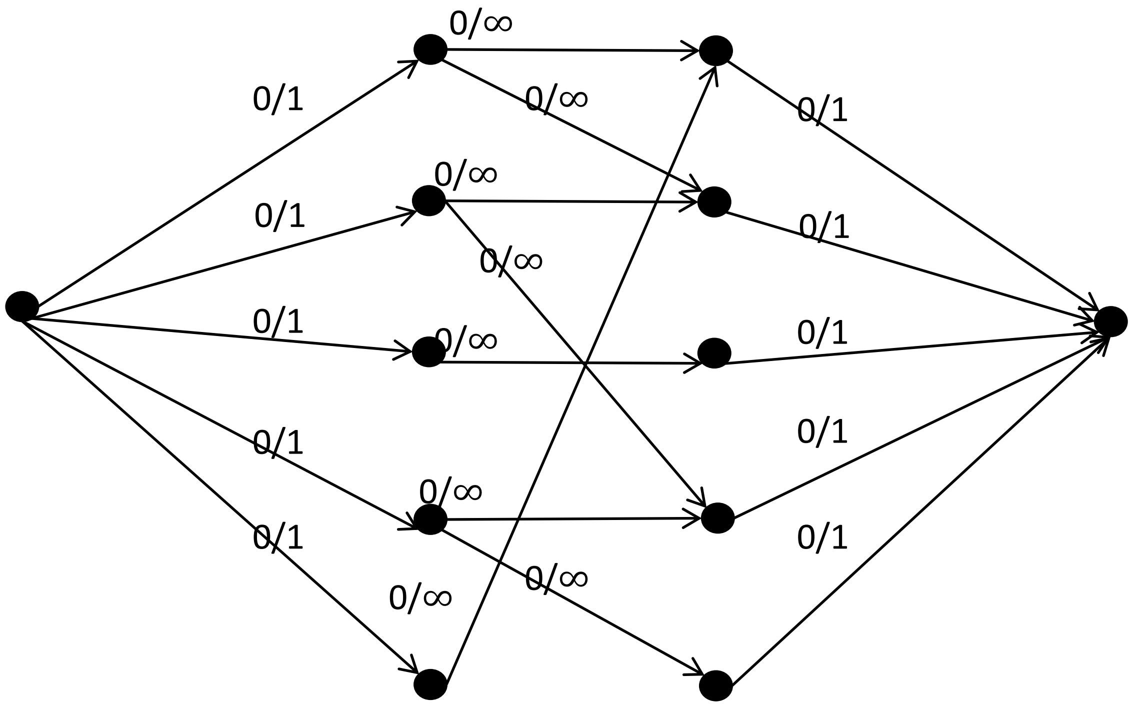
מכאן נסיק שזרימה מקסימלית נותנת זיווג מקסימום.

ניתוח זמן ריצה

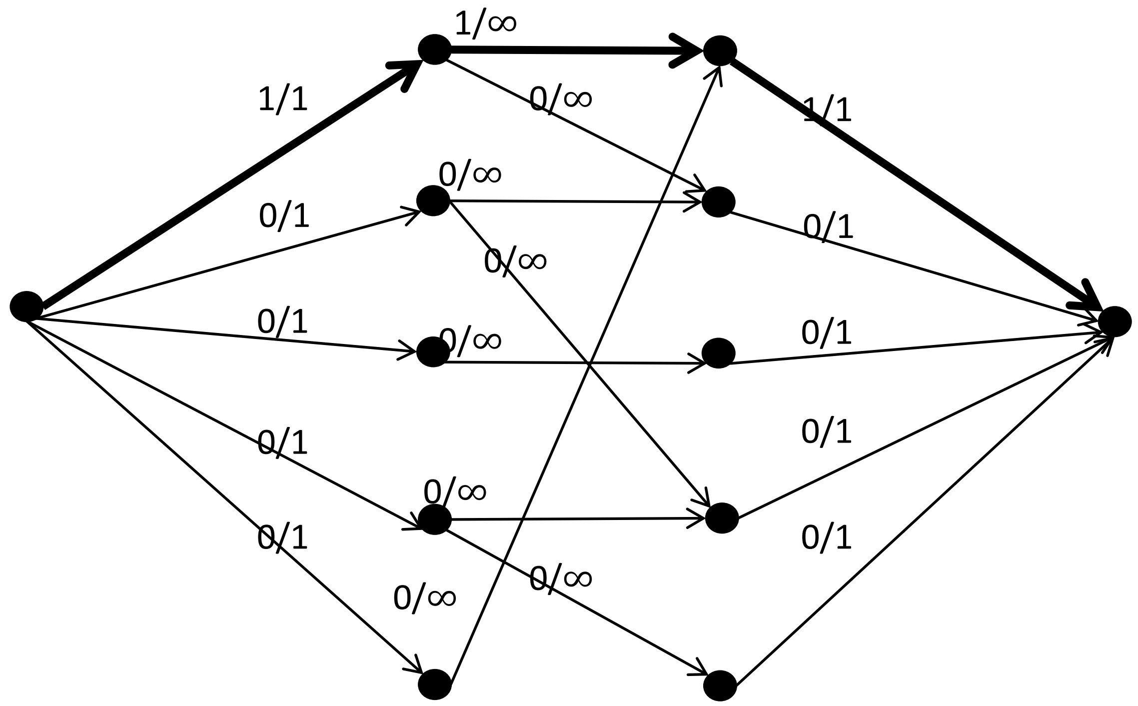
- **טענה**: בהינתן גרף דו-צדדי $G = (V,E)$ אשר לא מכיל קדקודים מבודדים, האלגוריתם מוצא זיווג מקסימום ב- **O(V*E)**.
- **הוכחה**
- בניית רשת זרימה N – O(V+E) (הוספת V קשתות)
- כל איטרציה של Ford-Fulkerson אלגוריתם - O(V+E)
- מספר האיטרציות חסום על ידי V
- לכן כל האלגוריתם לוקח זמן – O((V+E)V)
- היות שבגרף אין קדקודים מבודדים, מתקיים V=O(E),

  נקבל סיבוכיות האלגוריתם **O(V*E)**.

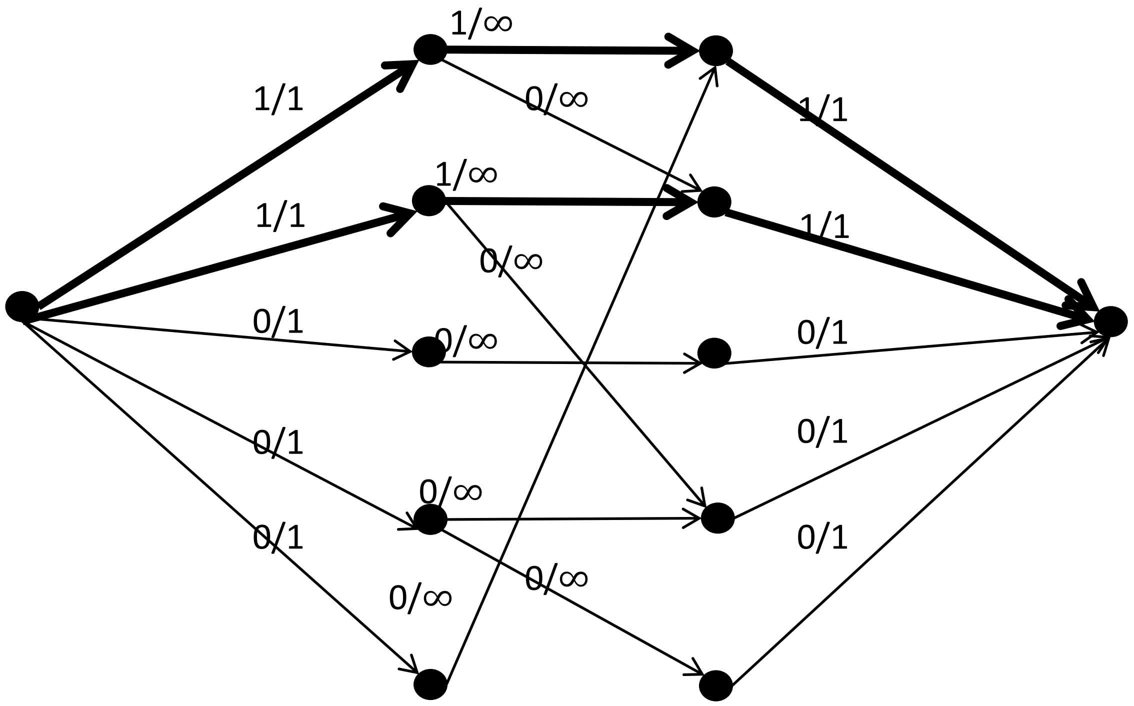
דוגמת הרצה



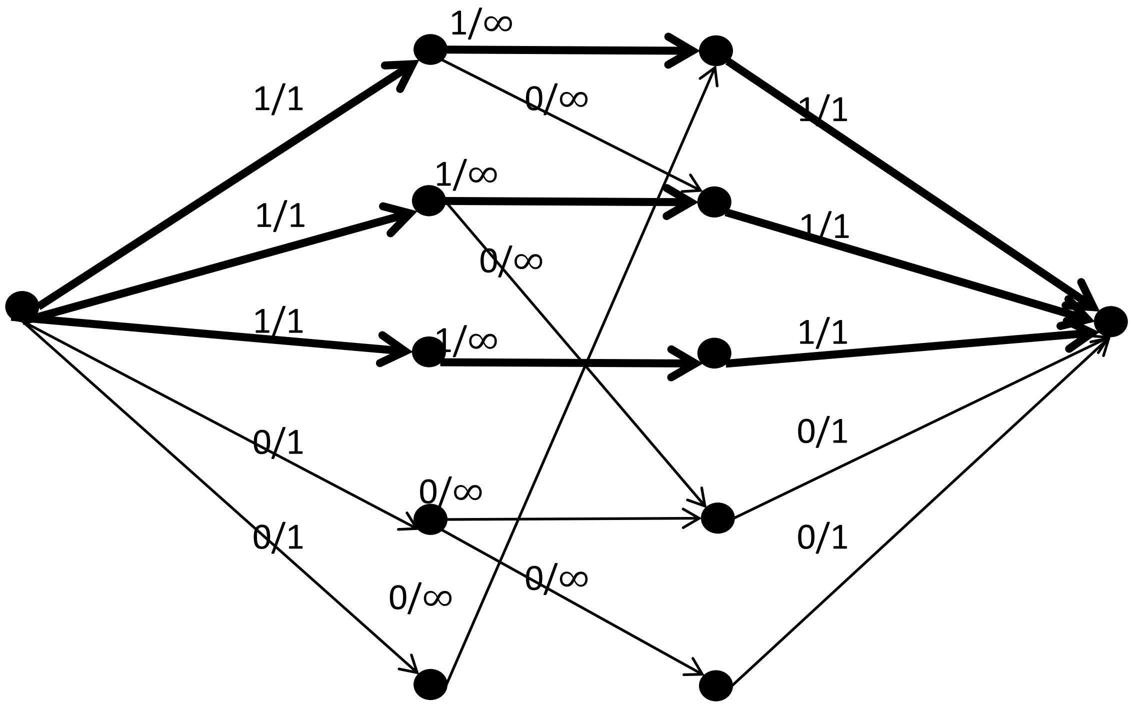
דוגמת הרצה



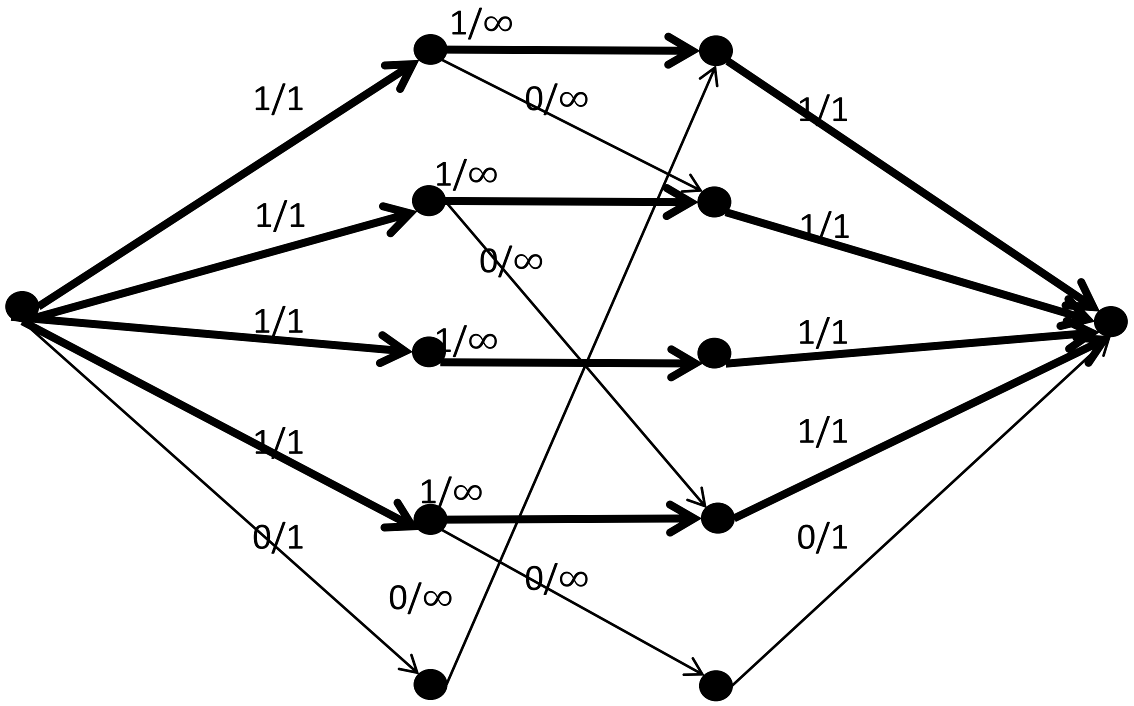
דוגמת הרצה



דוגמת הרצה

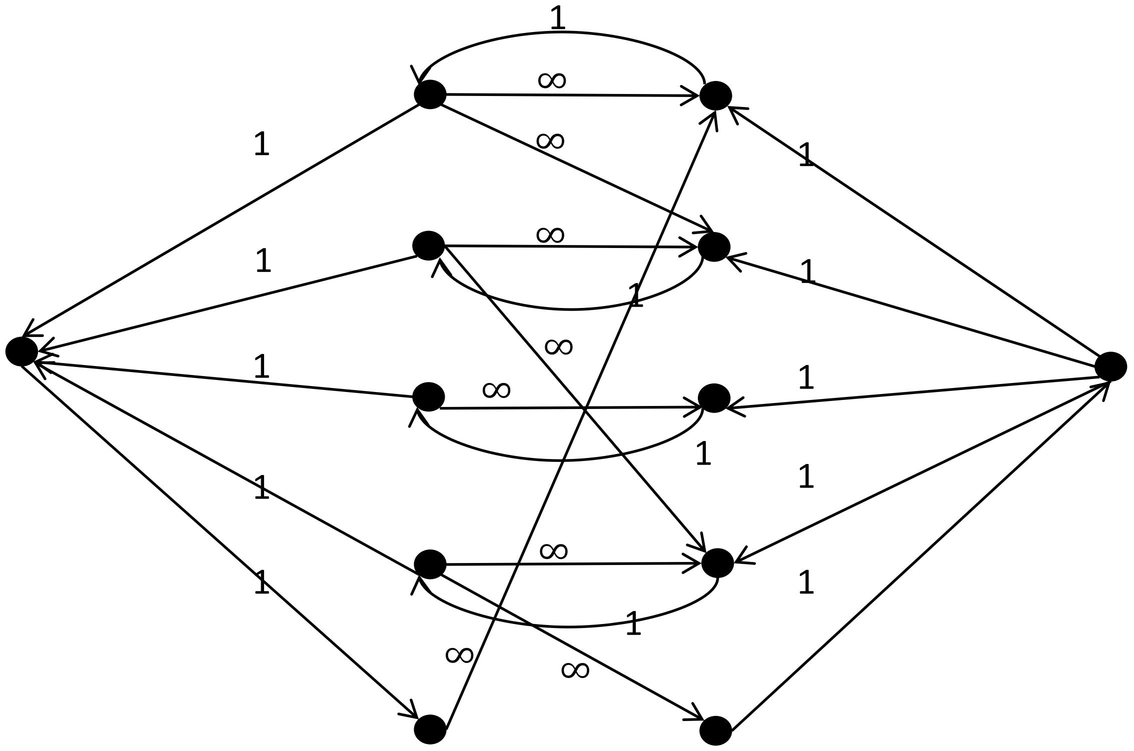


דוגמת הרצה



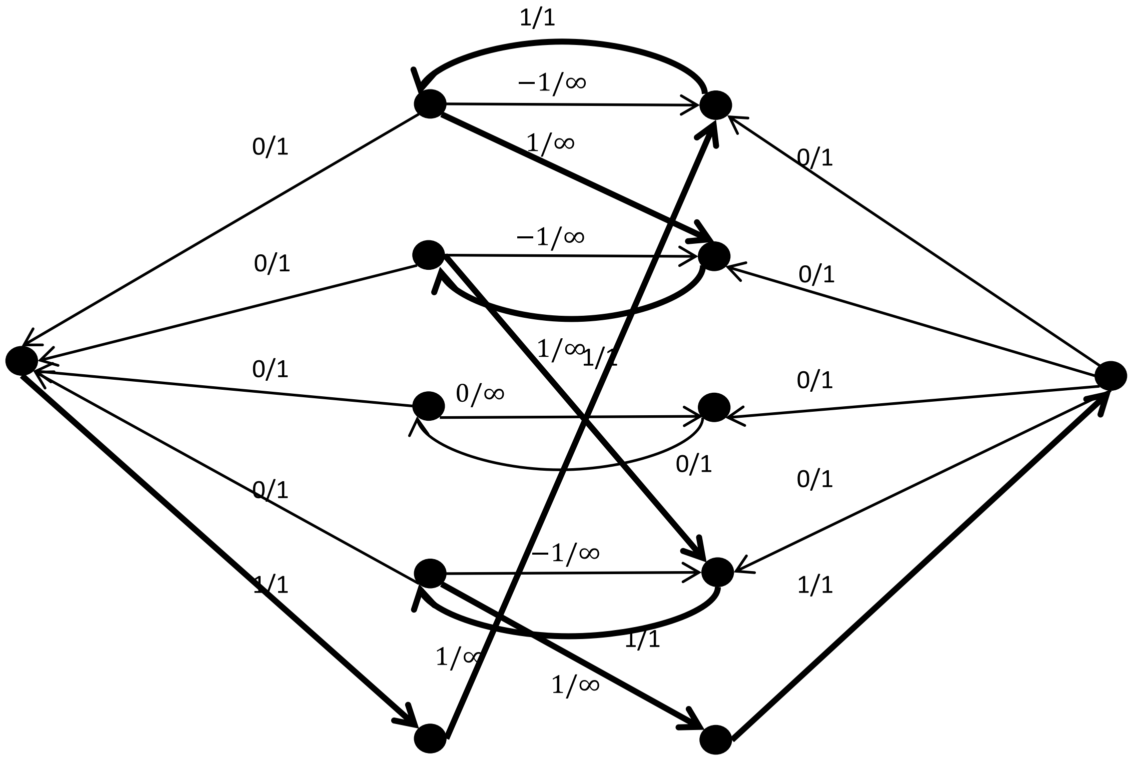
נשים לב שהזרימה היא <u>חוסמת</u>. נראה איך למצוא זרימה גדולה יותר.

הרשת השיורית

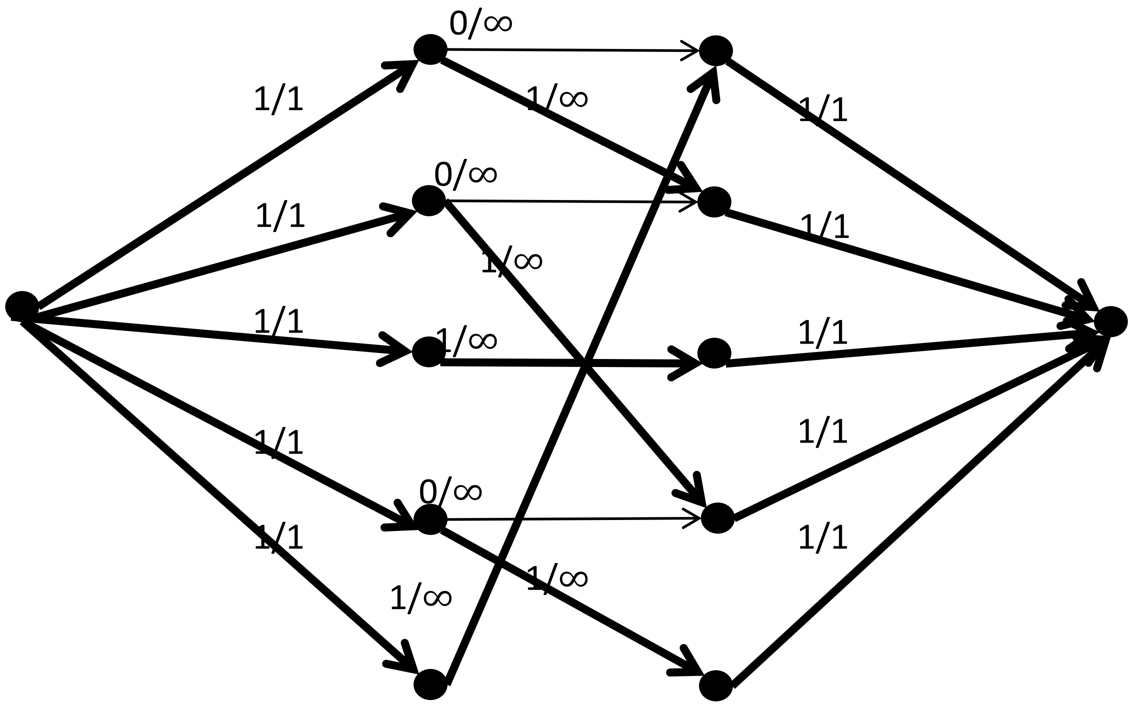


- קשתות עם קיבול אינסופי נשארו ברשת השיורית
- נוספו קשתות הפוכות (חרטה) במקומות בהן הייתה זרימה.

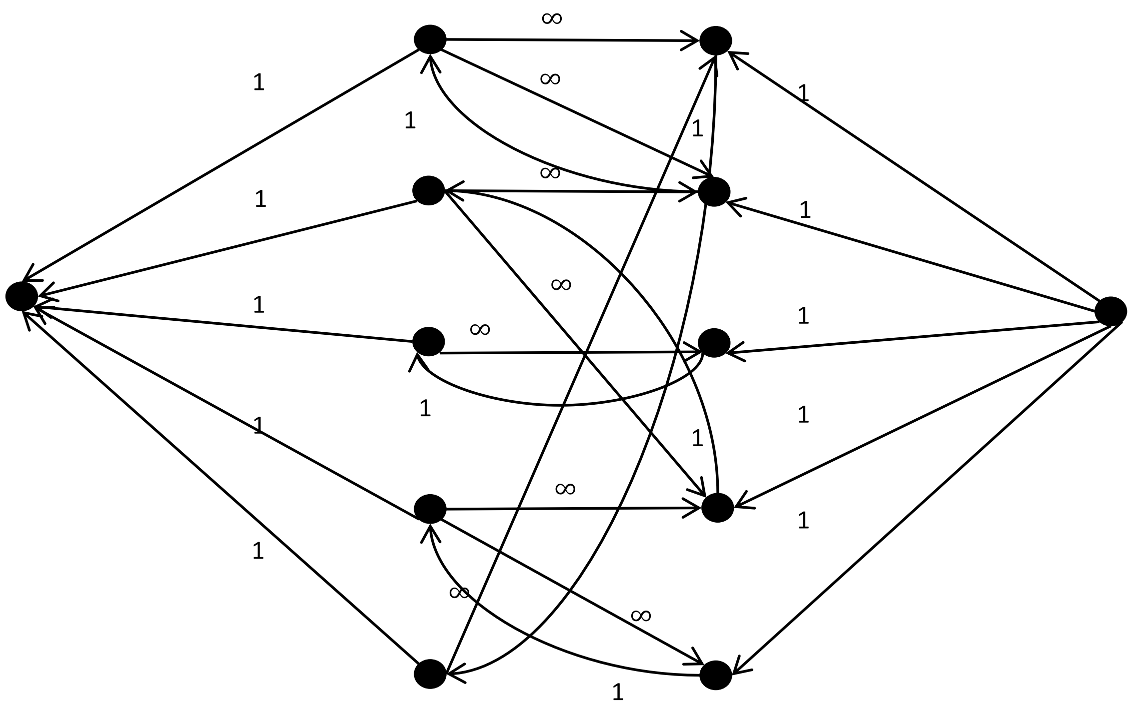
זרימה במסלול השיפור ברשת השיורית



זרימה חדשה ברשת המקורית



הרשת השיורית לפי הזרימה החדשה



נשים לב, כי אין מסלול שיפור ברשת השיורית הנוכחית.
לכן הזרימה הנוכחית מקסימלית.

משפט HALL
הוכחה אלטרנטיבית

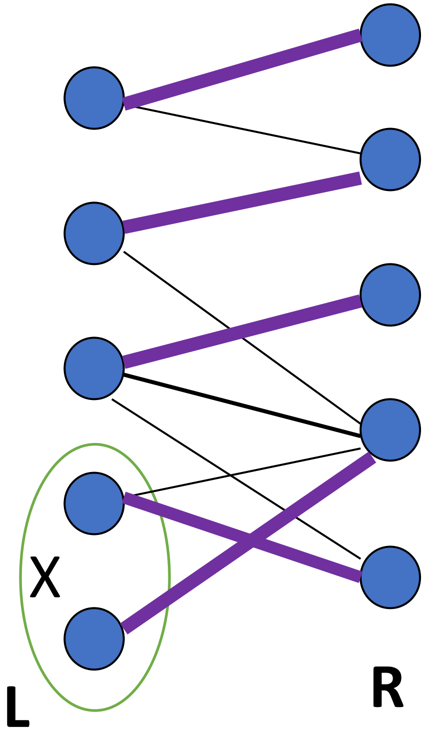
Philip Hall

יהי $G=(L\cup R,E)$ – גרף לא מכוון דו-צדדי.

משפט HALL (תנאי מספיק):

אם $|N(X)| \geq |X|$ לכל $X \subseteq L$,

אז ב-G קיים **זיווג שמכסה את L**.



הוכחה

נבנה רשת זרימה **N** באופן הבא:

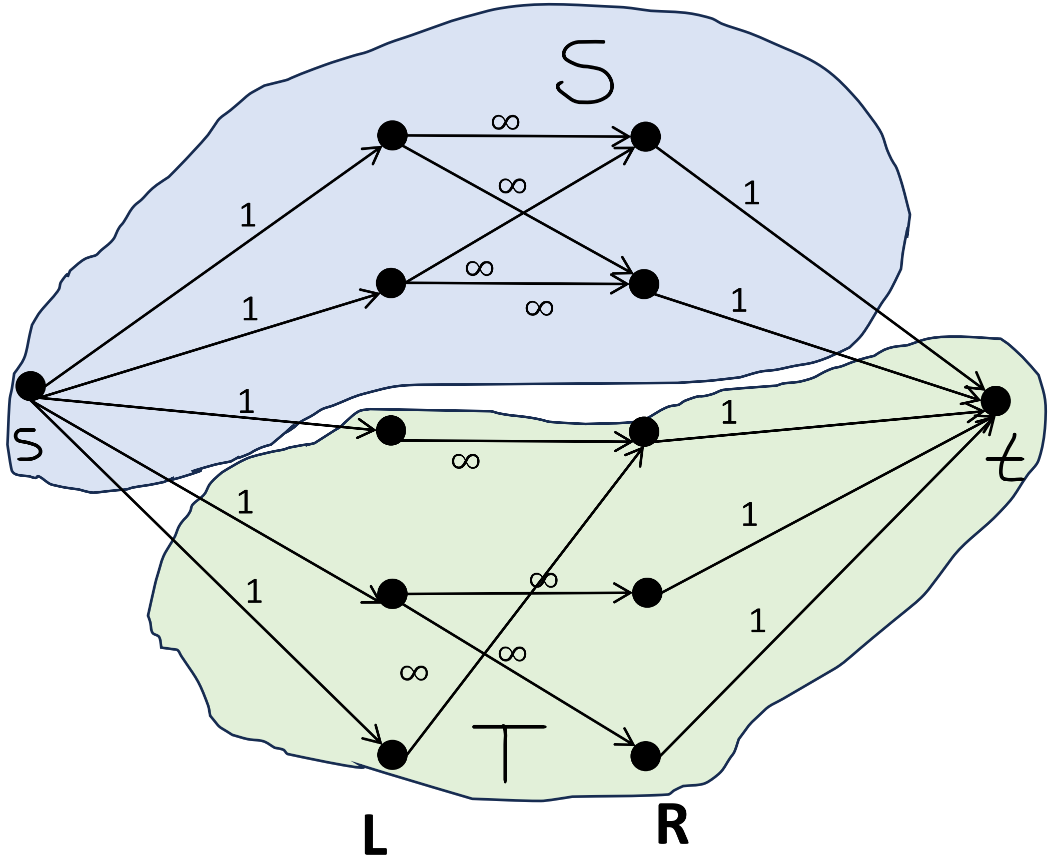
- נוסיף שני קדקודים חדשים **s,t**.
- נחבר את **s** בקשת לכל אחד מקדקודי **L**.
- נחבר כל אחד מקדקודי **R** בקשת ל- **t**.
- כל צלע $(u,v) \in E$ כך ש- $u \in L$, $v \in R$ תכוון $u \rightarrow v$.
- נגדיר את קיבולי הקשתות החדשות כ- 1 .
- נגדיר את קיבולי הקשתות של G כ- ∞.

משפט HALL
הוכחה אלטרנטיבית

יהי $G=(L\cup R,E)$ – גרף לא מכוון דו-צדדי.

משפט HALL (תנאי מספיק):

אם $|N(X)| \geq |X|$ לכל $X \subseteq L$, אז ב-G קיים **זיווג שמכסה את L**.



רעיון: נוכיח שקיימת זרימה בגודל $|L|$.
אז, בהתאם לטענה 1,
קיים זיווג בגודל $|L|$.
נעזר במשפט min cut max flow
ונוכיח שקיים חתך מינימלי בגודל $|L|$.

הוכחה (המשך)

יהי (S,T) - חתך מינימלי.

משפט HALL
הוכחה אלטרנטיבית

יהי $G=(L\cup R,E)$ – גרף לא מכוון דו-צדדי.

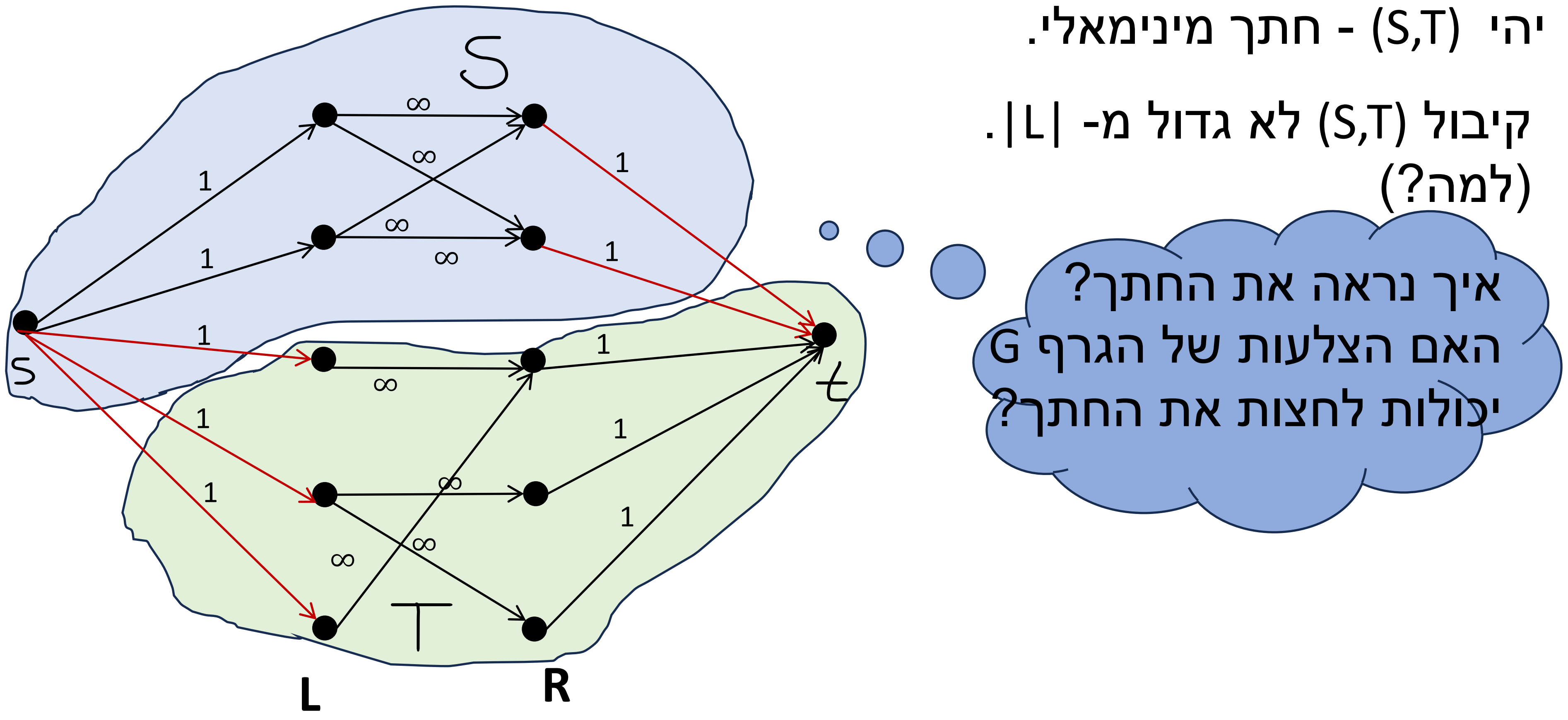
משפט HALL (תנאי מספיק):

אם $|N(X)| \geq |X|$ לכל $X \subseteq L$, אז ב-G קיים זיווג שמכסה את L.

הוכחה (המשך)

יהי (S,T) - חתך מינימאלי.

קיבול (S,T) לא גדול מ- |L|.
(למה?)



משפט HALL
הוכחה אלטרנטיבית

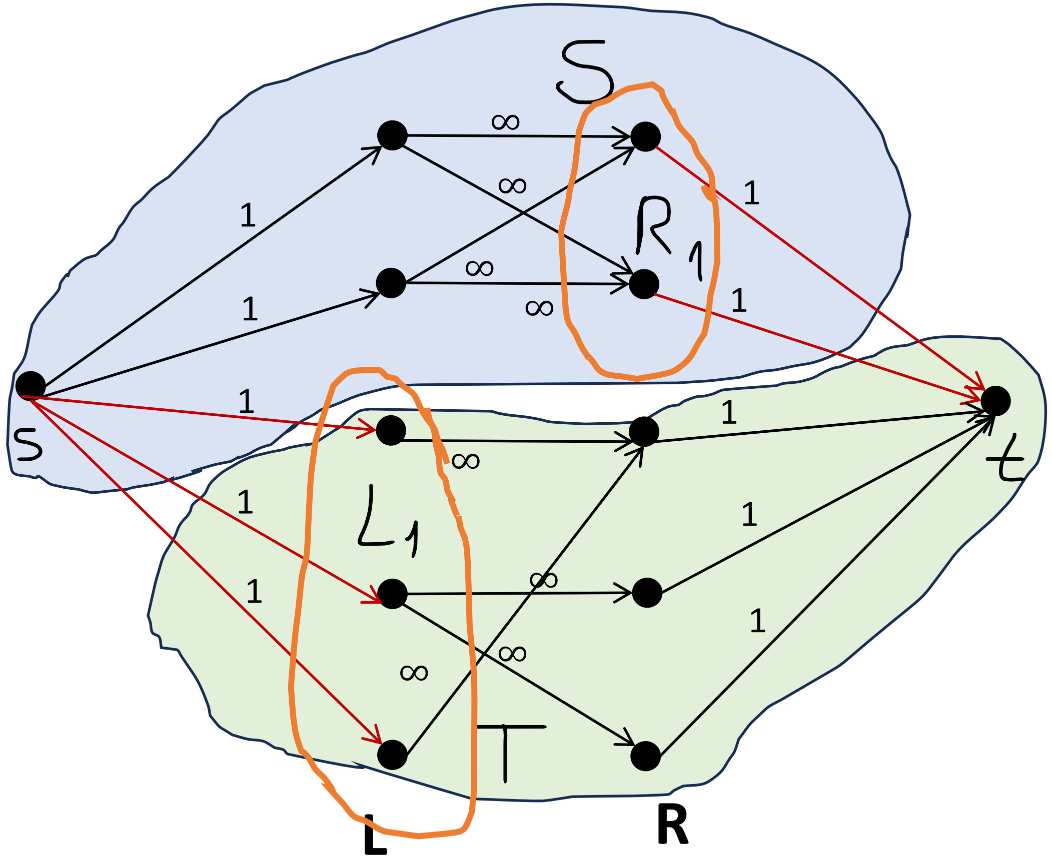
יהי G=(L∪R,E) – גרף לא מכוון דו-צדדי.

משפט HALL (תנאי מספיק):

אם $|N(X)| \geq |X|$ לכל $X \subseteq L$, אז ב-G קיים זיווג שמכסה את L.

הוכחה (המשך)

יהי (S,T) - חתך מינימאלי.



נסמן: $L_1 = L \cap T$

$R_1 = R \cap S$

$N(L - L_1) \subseteq R_1$

אחרת נקבל קיבול ∞

תנאי Hall

$|L - L_1| \leq |N(L - L_1)| \leq |R_1|$

משפט HALL
הוכחה אלטרנטיבית

יהי G=(L∪R,E) – גרף לא מכוון דו-צדדי.

משפט HALL (תנאי מספיק):

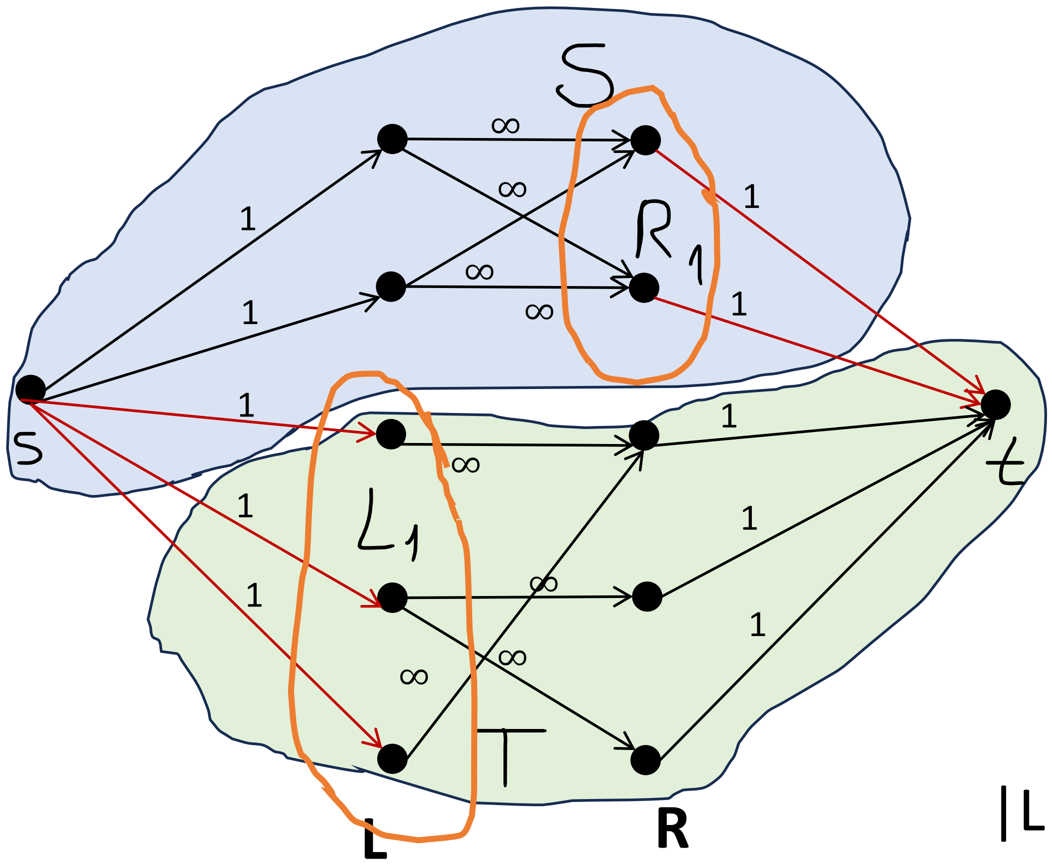
אם $|N(X)| \geq |X|$ לכל $X \subseteq L$, אז ב-G קיים זיווג שמכסה את L.

הוכחה (המשך)

יהי (S,T) - חתך מינימאלי.

נסמן: $L_1 = L \cap T$

$R_1 = R \cap S$



$$|L - L_1| \leq |N(L - L_1)| \leq |R_1|$$

⇓

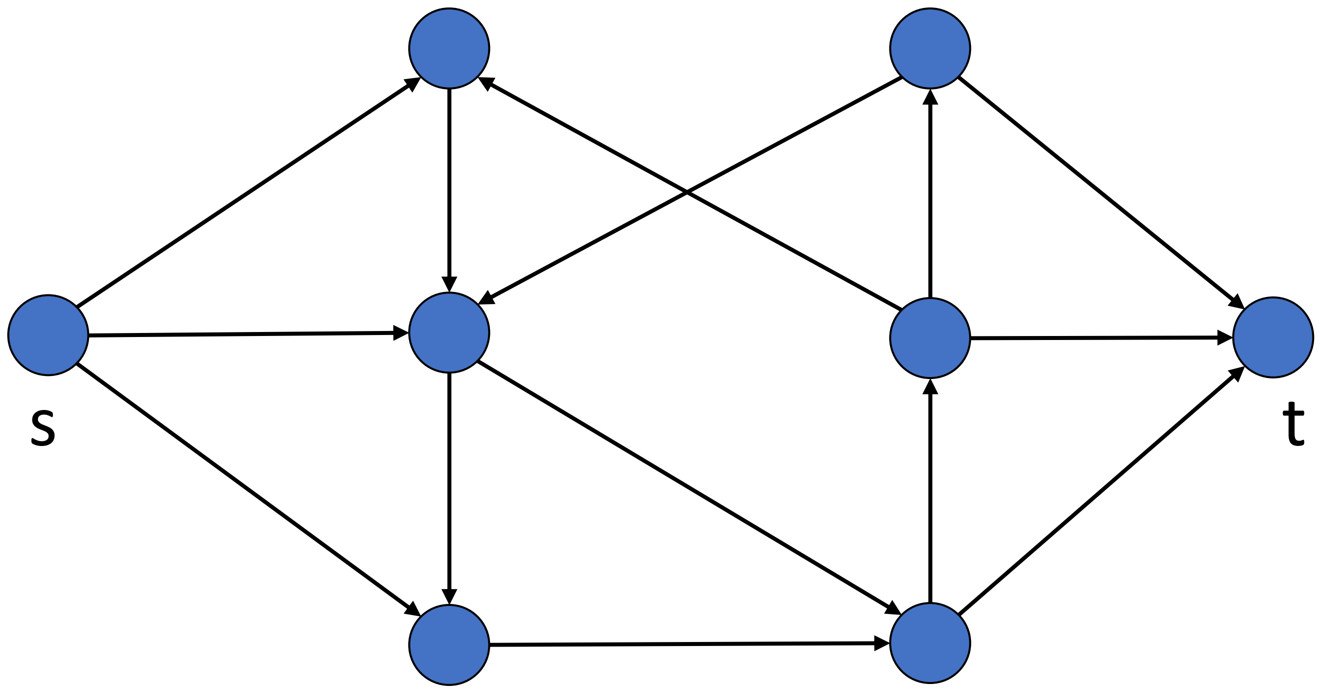
קיבול החתך (S,T) הוא:

$$|L_1| + |R_1| \geq |L_1| + |L - L_1| = |L|$$

לכן קיבול החתך המינימלי הוא |L|

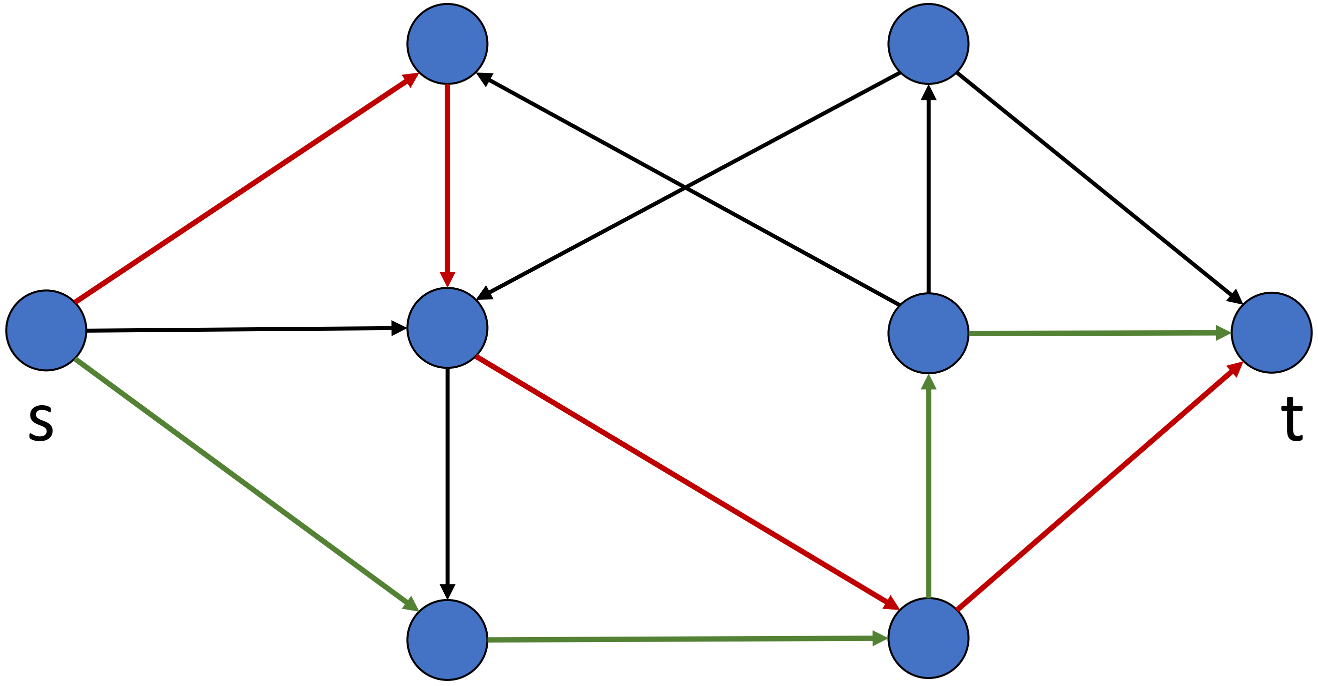
מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהנתן גרף מכוון** **G=(V,E)**, ושני קדקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים זרים **בצלעות** בין s ל- t .



Edge-disjoint paths מסלולים זרים

- **בהנתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קדקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים זרים **בצלעות** בין s ל- t .



מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- **הרעיון**: רדוקציה לבעיית הזרימה ברשת 0-1

מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- **הרעיון**: רדוקציה לבעיית הזרימה ברשת 0-1
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v) \in E$**.

מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון** $G=(V,E)$, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- **הרעיון**: רדוקציה לבעיית הזרימה ברשת 0-1
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה: יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

ב-**G** יש **k** מסלולים זרים **אמ"מ** קיימת זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N**, שגודלה היא **k**.

מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- **הרעיון**: רדוקציה לבעיית הזרימה ברשת 0-1
- נגדיר $c(u,v)=1$ לכל $(u,v)\in E$.

טענה 1: יהיה $G=(V,E)$ גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

אם יש **k** מסלולים זרים ב- **G**, אז קיימת זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N**, שגודלה היא **k**.

מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- **הרעיון**: רדוקציה לבעיית הזרימה ברשת 0-1
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל $(u,v) \in E$.

טענה 1: יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

אם יש **k** מסלולים זרים ב- **G**, אז קיימת זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N**, שגודלה היא **k**.

הוכחה: בהינתן **k** מסלולים זרים $P_1,\ldots P_k$, נגדיר זרימה f באופן הבא:

לכל $(v, u) \in P_i$ נגדיר $f(u,v) = 1$, $f(v,u) = -1$

לכל יתר הזוגות נגדיר $f(u,v) = 0$

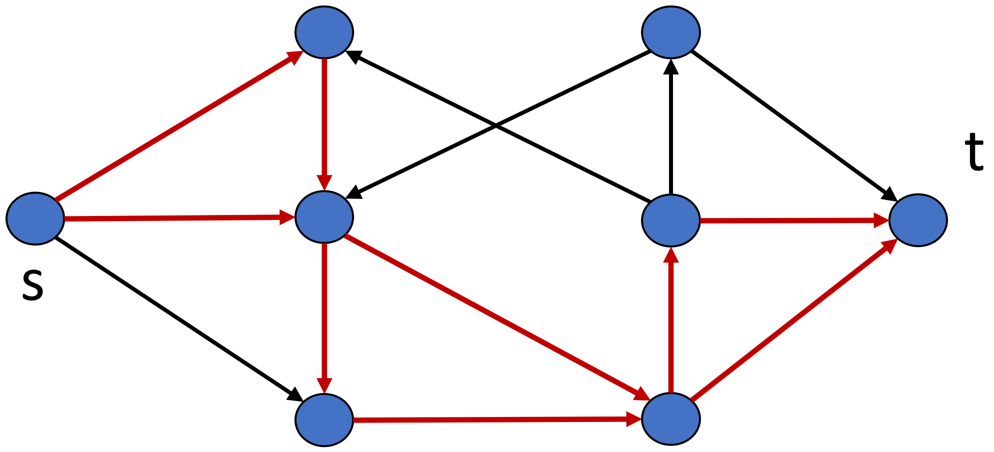
f – **זרימה** (למה?) בגודל k (כי מסלולים זרים).

מסלולים זרים   Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל- t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2: יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.



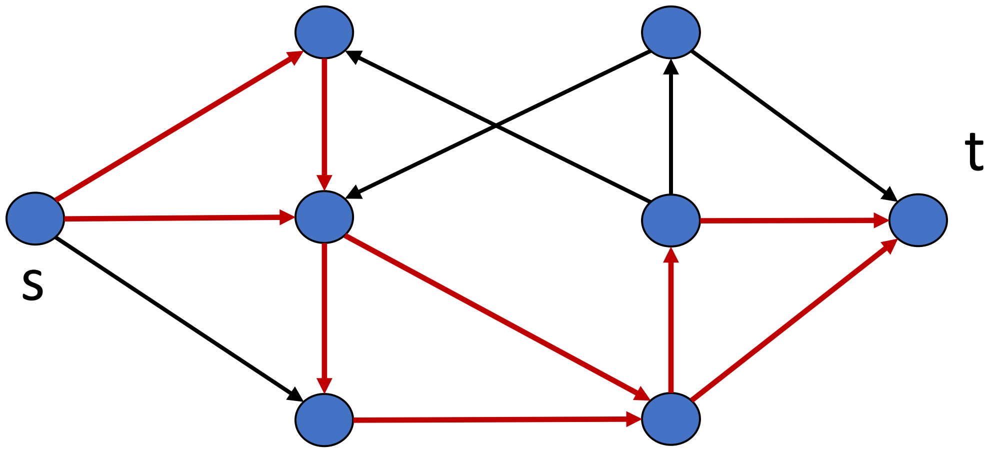
Edge-disjoint paths מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v) \in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.



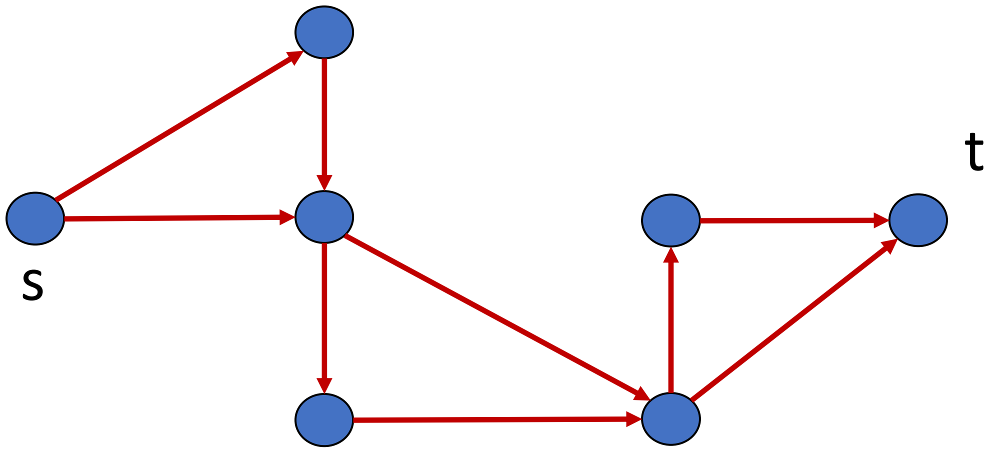
Edge-disjoint paths מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **c(u,v)=1** לכל **$(u,v) \in E$**.

טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G’** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נוכיח באינדוקציה לפי |f| =k**.**



Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

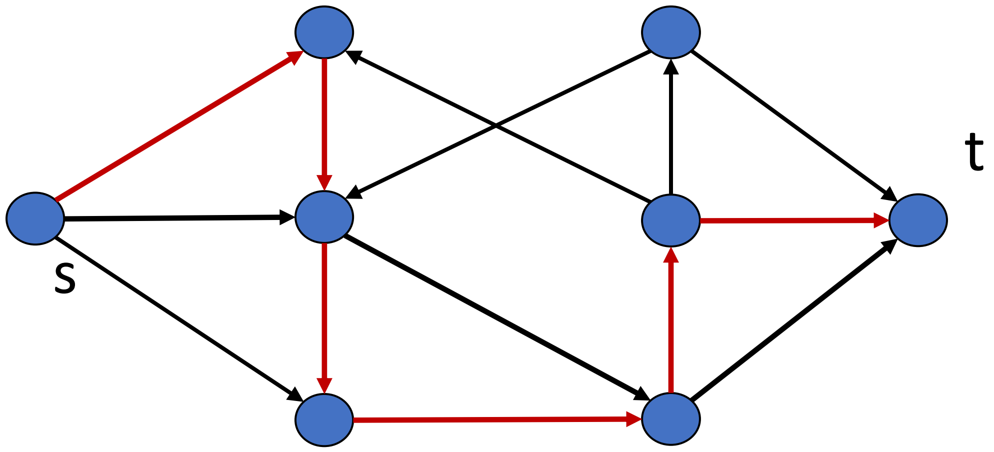
- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל- t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נוכיח באינדוקציה לפי **$k=|f|$.**

אם $k=1$ אז קיים מסלול אחד.



מסלולים זרים Edge-disjoint paths

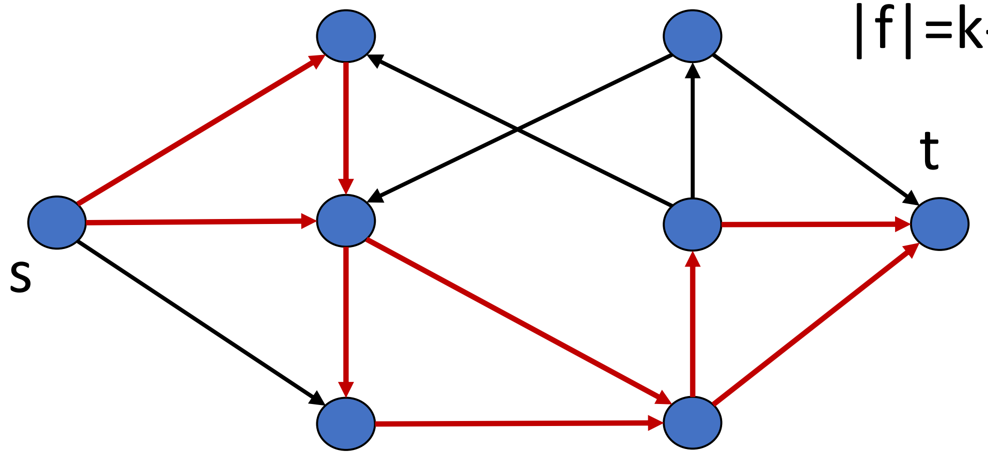
- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v) \in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נוכיח שאם הטענה נכונה עבור $|f|=k-1$

היא נכונה עבור $|f|=k$



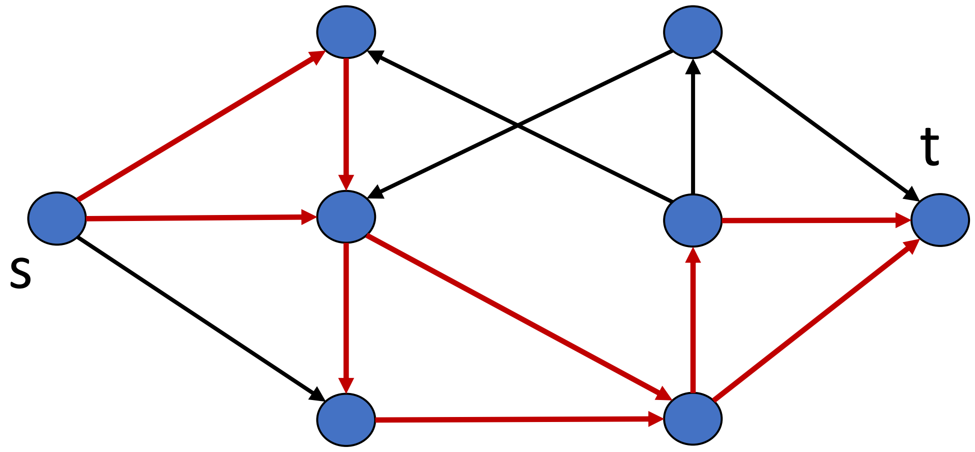
Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.



- נמצא **מסלול** מ- s ל- t

(שלא חוזר על צלעות)

למה קיים?

מסלולים זרים Edge-disjoint paths

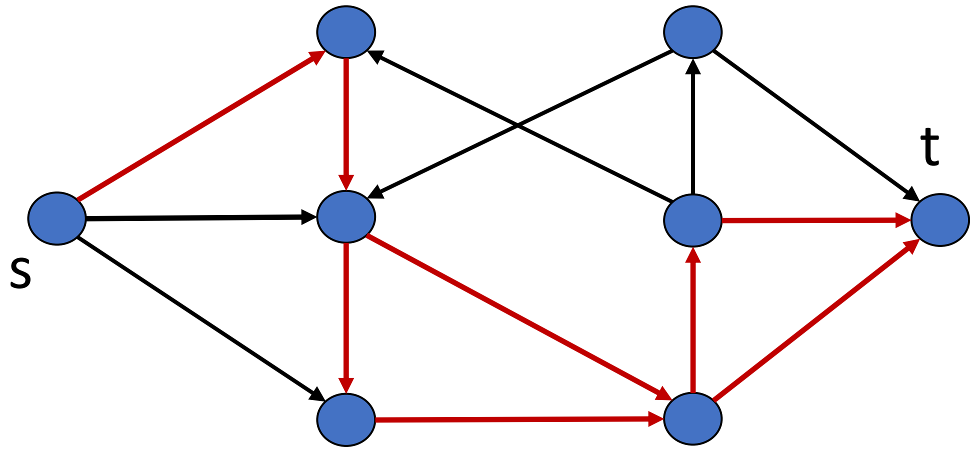
- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל- t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$ לכל $(u,v)\in E$**.

טענה 2: יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נמצא **מסלול** מ- s ל- t

(שלא חוזר על צלעות)



Edge-disjoint paths מסלולים זרים

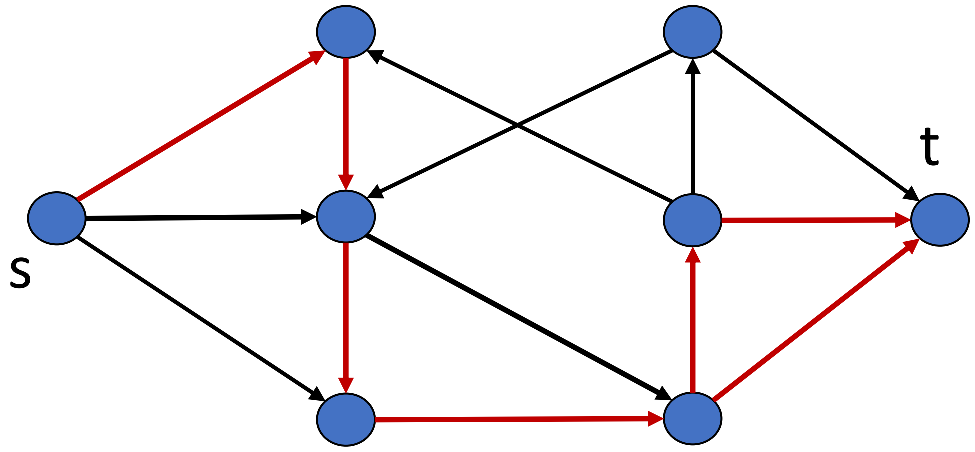
- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נמצא **מסלול** מ- s ל- t

(שלא חוזר על צלעות)



מסלולים זרים   Edge-disjoint paths

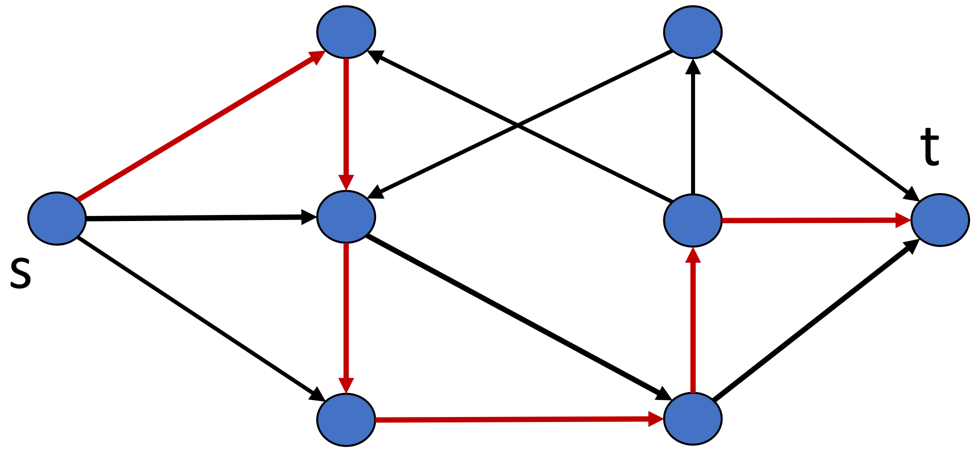
- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **c(u,v)=1** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G’** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נמצא **מסלול** מ- s ל-t

(שלא חוזר על צלעות)



Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **c(u,v)=1** לכל **(u,v)∈E**.

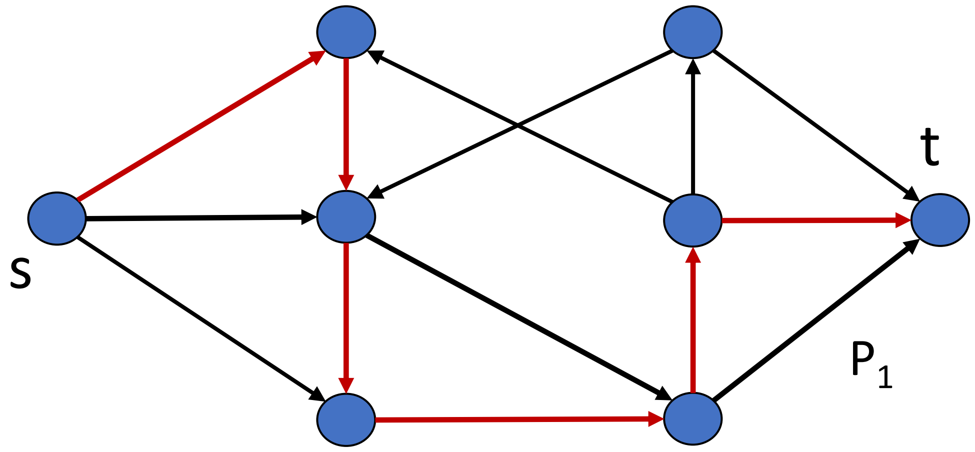
טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נמצא **מסלול** מ- s ל-t

(שלא חוזר על צלעות)

נסמן P_1 **ונוריד P_1** מ-**G'**



Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים s,t∈V למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל- t .
- נגדיר **c(u,v)=1** לכל **(u,v)∈E**.

טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נמצא **מסלול** מ- s ל-t

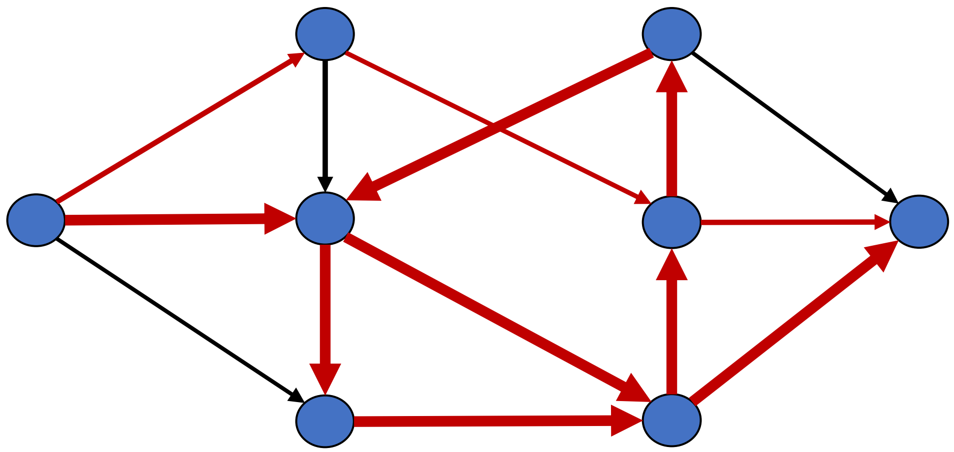
(שלא חוזר על צלעות)

נסמן P_1 .

יכול להיות שהמסלול מכיל מעגל,

אז שאפשר להוריד אותו מ-P_1

אם רוצים לקבל מסלולים פשוטים.



Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** – רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G’** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נמצא **מסלול** מ- s ל-t

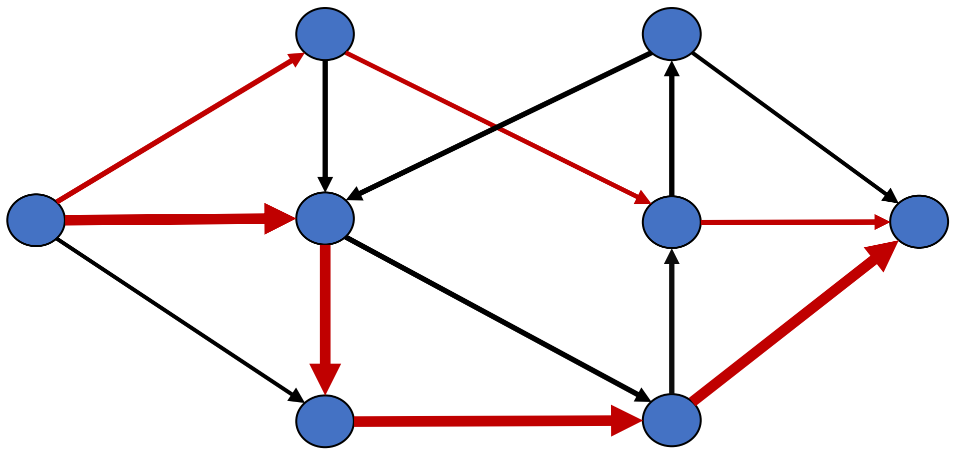
(שלא חוזר על צלעות)

נסמן P_1 .

יכול להיות שהמסלול מכיל מעגל,

אז שאפשר להוריד אותו מ-P_1

אם רוצים לקבל מסלולים פשוטים.



מסלולים זרים Edge-disjoint paths

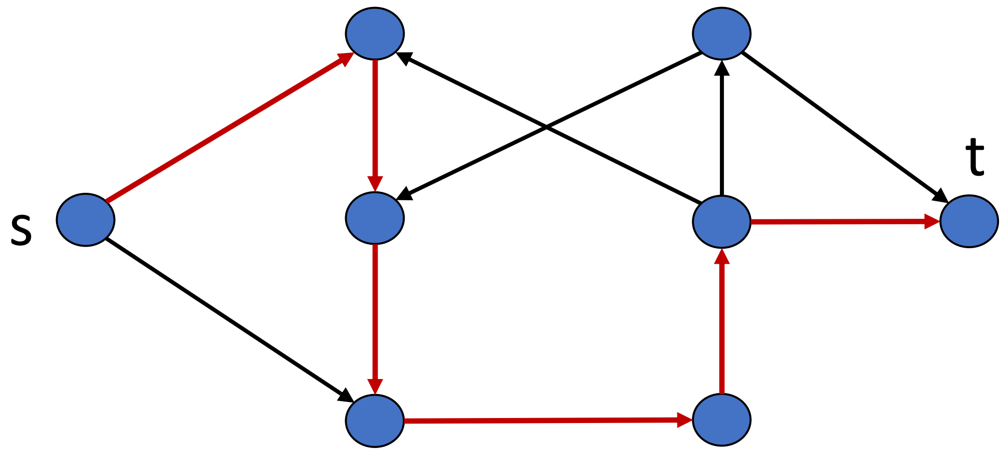
- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **c(u,v)=1** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבון בגרף **G’** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- **נוריד P_1** מ-**G’** .
- נקבל:
- **זרימה**

למה?



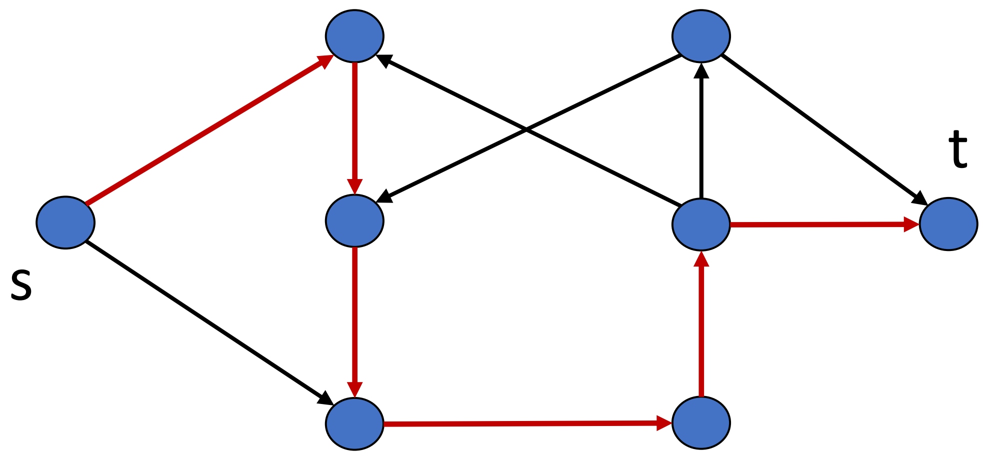
מסלולים זרים Edge-disjoint paths

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל- t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V,E)$** גרף מכוון ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** קיימים $|f|$ מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G’** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נוריד P_1 מ-**G’** .
- נקבל:
- **זרימה** ✓
- **גודל של הזרימה k-1**.



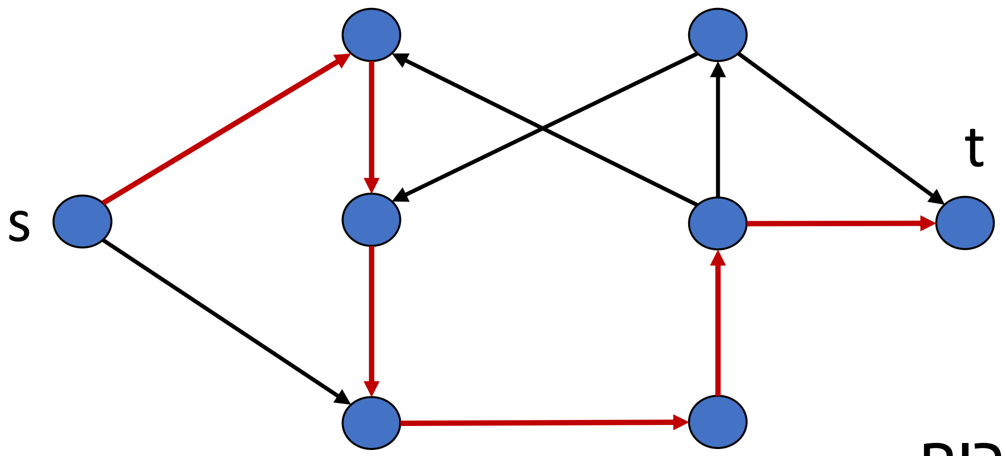
Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t\in V$ למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל- t .
- נגדיר **$c(u,v)=1$** לכל **$(u,v)\in E$**.

טענה 2:יהיה **$G=(V ,E)$** גרף מכוון ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה.

לכל זרימה **f** <u>בערכים שלמים</u> ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G'** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נוריד P_1 מ-**G'** .
- נקבל
- **זרימה**
- **גודל של הזרימה k-1**.
- לפי הנחת האינדוקציה יש k-1 מסלולים זרים.



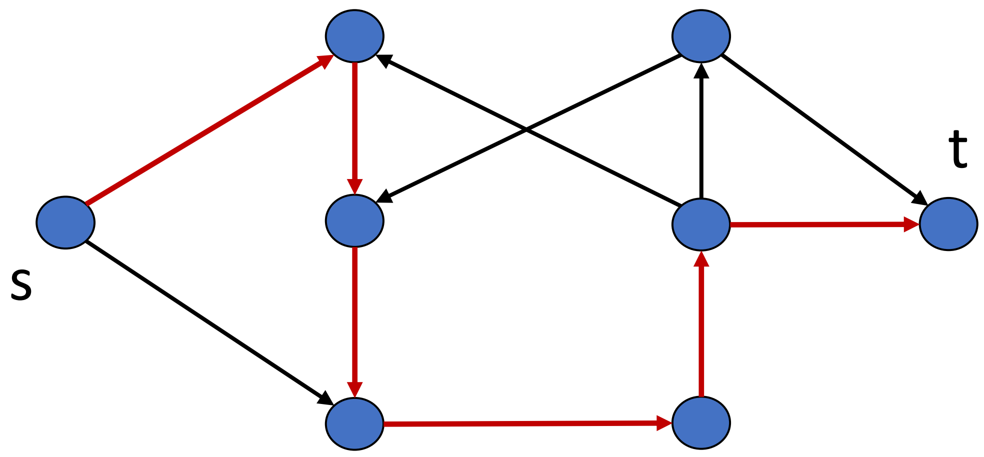
Edge-disjoint paths   מסלולים זרים

- **בהינתן גרף מכוון G=(V,E)**, ושני קודקודים s,t∈V למצוא מספר מקסימאלי של מסלולים **זרים בצלעות** בין s ל-t .
- נגדיר **c(u,v)=1** לכל **(u,v)∈E**.

טענה 2:יהיה **G=(V ,E)** גרף מכוון ותהי **N** –רשת הזרימה המתאימה. לכל זרימה **f** בערכים שלמים ב- **N** קיימים |f| מסלולים זרים ב- **G**.

- **הוכחה:** נתבונן בגרף **G’** המושרה ע"י הצלעות ב- G אשר הזרימה בהן לפי f היא 1.
- נוריד P_1 מ-**G’** .
- נקבל
- **זרימה**
- **גודל של הזרימה k-1**.
- לכן בגרף G יש k=1+(k-1)

מסלולים זרים



גודל זרימה מקסימלית = מספר מסלולים זרים

Path Decomposition Algorithm

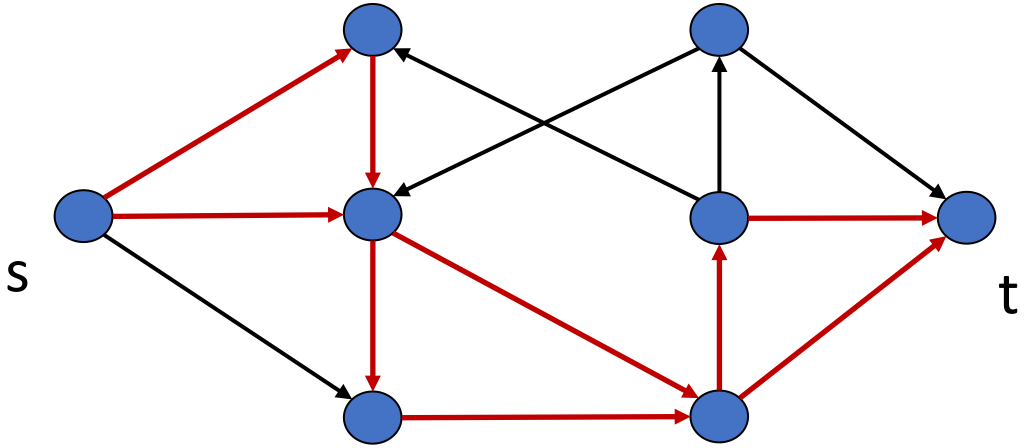
- Find the maximum flow in G.
- Start walking from s.
- If you create a cycle, eliminate the flow around the cycle to create a simple path.
- If you reach t, output the path you used to reach t.

ניתוח זמן ריצה

- **טענה**: בהינתן גרף מכוון $G = (V,E)$ האלגוריתם מוצא מספר מקסימלי של מסלולים זרים ב- $\mathbf{O(V*E)}$.
- **הוכחה**
- בניית רשת זרימה N – $O(E)$
- אלגוריתם Ford-Fulkerson $O(Ef^*)=O(EV)$ (למה?)
- חיפוש מסלולים– $O(E)$ (כי כל צלע שבחרנו תמחק, וזמן טיפול בכל צלע שנבחרה סה"כ $O(1)$)
- נקבל סיבוכיות האלגוריתם $\mathbf{O(V*E)}$.

קישוריות רשת   Network connectivity

- **בהינתן גרף מכוון $G=(V,E)$**, ושני קודקודים $s,t \in V$ למצוא מספר הקשתות <u>המינימלי</u> שיש להסיר על מנת שלא יהיה מסלול מ-s ל-t.



Network connectivity   קישוריות רשת

Karl Menger

- **משפט** (Menger's Theorem, 1927)

  המספר המקסימלי של מסלולים זרים מ-s ל-t

  שווה למספר המינימלי של קשתות

  שיש להסיר על מנת שלא יהיה

  מסלול מ-s ל-t (edge-cut).

  (**min cut**).